Tabăra de MATE şi NU NUMAI

Râul Alb

Iunie 2017

Tabăra de MATE şi NU NUMAI

INEGALITĂŢI
- selecţie de probleme pentru clasa a VII-a şi a VIII -a

prof. Camelia Pîrvu
Oraviţa, CS

Cuprins:

1. Proprietăţi uzuale;
2. Inegalităţi elementare, metode de rezolvare;
3. Inegalităţi remarcabile, demonstraţii;
4. Aplicarea metodelor studiate în demonstrarea inegalităţilor algebrice ;
5. Probleme propuse, indicaţii, evaluare.

1. PROPRIETĂŢI UZUALE:

Proprietăţile relaţiei de ordine $\geq$. Ne sunt utile următoarele propoziţii:

P_1: Fie a,b,c,d $\in \mathbb{R}_+$,b≠0, d≠0, astfel încât $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}$. Atunci $ad \geq bc$.

P_2: Fie a,b,c,d $\in \mathbb{R}$, astefl încât $a \geq c, b \geq d$. Atunci $a+b \geq c+d$.

(mai multe inegalităţi de acelaşi sens se pot aduna obţinându-se o nouă inegalitate)

P_3: Fie a,b,c,d $\in \mathbb{R}_+$, astefl încât $a \geq c, b \geq d$. Atunci $a \cdot b \geq c \cdot d$

(mai multe inegalităţi de acelaşi sens cu toţi membri numere positive se pot înmulţi obţinându-se o nouă inegalitate). Inegalitatea devine egalitate dacă şi numai dacă a=b şi c=d.

Breviar teoretic:

- Una din primele inegalităţi întâlnite în gimnaziu este $a^2 \geq 0$, oricare ar fi a număr real.
- **Dacă** $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, atunci $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 \geq 0, (\forall) a_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,n}$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$

2. INEGALITĂŢI ELEMENTARE;

Inegalităţi elementare

- $a + \frac{1}{a} \geq 2, (\forall) a > 0$
- $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2, (\forall) a, b > 0$
- $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca, (\forall) a, b, c \in \mathbb{R}$

În această temă vom discuta despre câteva inegalităţi, să le spunem elementare şi inegalităţi clasice (remarcabile), deosebit de importante: inegalitatea mediilor, inegalitatea lui Cauchy-Schwarz, etc…

Vom utiliza în aplicaţii trei metode de bază pentru demonstrarea inegalităţilor: metoda reducerii, a spargerii şi metoda bazată pe utilizarea inegalităţilor remarcabile prezentate mai sus.

METODE DE REZOLVAREA A INEGALITĂŢILOR:

- **Metoda reducerii** – constă în efectuarea de operaţii simple asupra inegalităţii până se ajunge la o formă despre care putem spune cu certitudine că e adevărată, de exemplu se foloseşte ipoteza sau proprietatea $(a \pm b)^2 \geq 0$ sau faptul că o sumă de pătrate este mai mare sau egală cu 0.

Exemplu:

Arătaţi că $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2, (\forall) a, b > 0$

Soluţie:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2 \Rightarrow \frac{a^2+b^2}{ab} \geq 2 \Rightarrow a^2+b^2 \geq 2ab \Rightarrow (a-b)^2 \geq 0 \text{ (adevărat).}$$

Metoda spargerii – se bazează pe proprietăţile relaţiei de ordine $\geq$ şi aplicarea inegalităţilor elementare.

Exemplu:

Să se demonstreze că oricare ar fi numerele a, b, c pozitive, avem:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

Soluţie:

Metoda reducerii:

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca \,|\cdot 2 \Rightarrow 2a^2+2b^2+2c^2 \geq 2ab+2bc+2ca$$

$$\Rightarrow a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2 \geq 0 \Rightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0 \text{ (adevărat)}$$

Metoda spargerii:

$$(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2-2ab+b^2 \geq 0 \Rightarrow a^2+b^2 \geq 2ab$$

Ştim că $(b-c)^2 \geq 0 \Rightarrow b^2-2bc+c^2 \geq 0 \Rightarrow b^2+c^2 \geq 2bc$

$$(c-a)^2 \geq 0 \Rightarrow c^2-2ca+a^2 \geq 0 \Rightarrow c^2+a^2 \geq 2ca$$

$$\begin{aligned} & a^2+b^2 \geq 2ab \\ \Rightarrow\ & b^2+c^2 \geq 2bc \\ & \underline{c^2+a^2 \geq 2ca} \end{aligned}$$

$$a^2+b^2+b^2+c^2+c^2+a^2 \geq 2ab+2bc+2ca \Rightarrow 2a^2+2b^2+2c^2 \geq 2ab+2bc+2ca \,|:2$$

de unde se obţine inegalitatea cerută.

Aplicaţii:

1) Să se demonstreze că pentru orice numere reale pozitive au loc inegalităţile:
   a) $a+b \geq 2\sqrt{ab}$;
   b) $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$;
   c) $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a) \geq 6abc$
   d) $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$;

3. INEGALITĂŢI REMARCABILE

Ne vom ocupa de demonstrarea unor inegalităţi remarcabile şi anume **inegalitatea mediilor, identitatea lui Lagrange şi inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski-Schwarz** (pe care o vom nota prescurtat CBS) urmând ca celelalte inegalităţi importante să le studiaţi în clasa a VIII-a şi în anii de liceu. Aceste inegalităţi remarcabile le vom folosi în demostrarea unor inegalităţi date şi vom numi metoda aplicată: **Metoda inegalităţii remarcabile**.

1. INEGALITATEA MEDIILOR:

min(a,b) ≤ M_h ≤ M_g ≤ M_a ≤ M_p ≤ max(a,b), unde a si b $\in R_+$

$M_h=\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ **(media armonică);** $M_g=\sqrt{ab}$ **(media geometrică);**

$M_a=\dfrac{a+b}{2}$ **(media aritmetică);** $M_p=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ **(media pătratică)**

Dacă a≤b, atunci a≤$\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\le\sqrt{ab}\le\dfrac{a+b}{2}\le\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ **≤b**

(egalitatea are loc dacă a=b).

2. IDENTITATEA LUI LAGRANGE

$$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=\left(ac+bd\right)^2+\left(ad-bc\right)^2$$ **sau**

$$\left(a_1^2+b_1^2\right)\left(a_2^2+b_2^2\right)=\left(a_1a_2+b_1b_2\right)^2+\left(a_1b_2-a_2b_1\right)^2$$

3. INEGALITATEA LUI CAUCHY-BUNIAKOVSKI-SCHWARZ (CBS)

$$\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)\ge\left(ax+by\right)^2$$

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)\ge\left(ax+by+cz\right)^2$$

În general: $\left(a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+\ldots+a_n^{\,2}\right)\left(b_1^{\,2}+b_2^{\,2}+\ldots+b_n^{\,2}\right)\ge\left(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_n\,b_n\right)^2$

4. INEGALITATEA LUI BERNOULLI

Fie a≥-1, n$\in N^*$, atunci $(1+a)^n\ge 1+na$

5. INEGALITATEA LUI TITU ANDREESCU

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\ge\frac{(a+b)^2}{x+y},(\forall)a,b\in\mathbb{R},x,y>0;$$

$$\frac{a_1^{\,2}}{x_1}+\frac{a_2^{\,2}}{x_2}+\ldots+\frac{a_n^{\,2}}{x_n}\ge\frac{\left(a_1+a_2+\ldots+a_n\right)^2}{x_1+x_2+\ldots+x_n},(\forall)a_i\in\mathbb{R},x_i>0,i=\overline{1,n},n\ge 2$$

6. INEGALITATEA LUI MINKOVSKI

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}\ge\sqrt{\left(a_1+b_1\right)^2+\left(a_2+b_2\right)^2+\ldots+\left(a_n+b_n\right)^2}$$

7. INEGALITATEA LUI CEBÂŞEAV

I. Dacă $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$ şi $b_1 \le b_2 \le ... \le b_n$, $n \in N^*$

Atunci: $$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n}{n} \ge \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + ... + b_n}{n}$$

II. Dacă $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$ şi $b_1 \ge b_2 \ge ... \ge b_n$, $n \in N^*$

Atunci: $$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n}{n} \le \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + ... + b_n}{n}$$

Demonstrații:

- **Inegalitatea mediilor (pentru două numere):**

$$\mathbf{a} \le \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \le \mathbf{b}$$ **,** unde a şi b $\in R_+$ şi a $\le$ b

✓ **a ≤ $\mathbf{M_h}$**

Demonstraţie:

$$a \le \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \Rightarrow a \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \le 2 \Rightarrow 1 + \frac{a}{b} \le 2 \Rightarrow \frac{a}{b} \le 2 \Rightarrow a \le b$$, adevărat, conform ipotezei

✓ **$\mathbf{M_h \le M_g}$** $\Leftrightarrow$ $$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \le \sqrt{ab} \Rightarrow \frac{2}{a+b} \le \sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}} \Rightarrow \frac{2}{a+b} \le \frac{1}{\sqrt{ab}} \Rightarrow 2\sqrt{ab} \le a+b \Rightarrow 4ab \le (a+b)^2$$

Demonstraţie: înlocuim $\frac{1}{a}$ cu a şi $\frac{1}{b}$ cu b şi obţinem

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \le \sqrt{ab} \Rightarrow \frac{2}{a+b} \le \sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}} \Rightarrow \frac{2}{a+b} \le \frac{1}{\sqrt{ab}} \Rightarrow 2\sqrt{ab} \le a+b \Rightarrow 4ab \le (a+b)^2 \Rightarrow 4ab \le a^2 + 2ab + b^2 \Rightarrow (a-b)^2 \ge 0$$

✓ **$\mathbf{M_g \le M_a}$** $\Leftrightarrow$ $$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$$

Demonstraţie:

Încercați voi:

✓ **$\mathbf{M_a \le M_p}$** $\Leftrightarrow$ $$\frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

Demonstraţie:

Încercați voi:

✓ **$\mathbf{M_p \le b}$** $\Leftrightarrow$ $$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \le b$$

Demonstraţie:

Încercați voi:

Identitatea lui Lagrange: $\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=\left(ac+bd\right)^2+\left(ad-bc\right)^2$

Demonstrație:

Aplicăm metoda reducerii şi efectuând calcule obţinem:

$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=\left(ac+bd\right)^2+\left(ad-bc\right)^2 \Rightarrow a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2=a^2c^2+2acbd+b^2d^2+a^2d^2-2adbc+b^2c^2$

$\Rightarrow a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2=a^2c^2+2acbd+b^2d^2+a^2d^2-2adbc+b^2c^2 \Leftrightarrow 0=0$, evident adevărat.

Inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski-Schwarz

$$\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)\geq\left(ax+by\right)^2$$

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)\geq\left(ax+by+cz\right)^2$$

Demonstrație:

Metoda inegalității remarcabile:

Aplicăm identitatea lui Lagrange şi obţinem $\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)=\left(ax+by\right)^2+\left(ax-by\right)^2\geq\left(ax+by\right)^2$

Metoda reducerii: Să aplicăm această metodă pentru CBS cu trei numere:

$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)\geq\left(ax+by+cz\right)^2$

$\Rightarrow a^2x^2+a^2y^2+a^2z^2+b^2x^2+b^2y^2+b^2z^2+c^2x^2+c^2y^2+c^2z^2\geq a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+2axby+2bycz+2axcz$

$\Rightarrow a^2y^2+a^2z^2+b^2x^2+b^2z^2+c^2x^2+c^2y^2-2axby-2bycz-2axcz\geq 0$

$\Rightarrow\left(a^2y^2-2aybx+b^2x^2\right)+\left(b^2z^2-2bzcy+c^2y^2\right)+\left(a^2z^2-2azcx+c^2x^2\right)\geq 0$

$\Rightarrow\left(ay-bx\right)^2+\left(bz-cy\right)^2+\left(az-cx\right)^2\geq 0$

4. APLICAREA METODELOR STUDIATE ÎN DEMONSTRAREA INEGALITĂȚILOR ALGEBRICE ;

✓ Aplicarea inegalităților elementare și a inegalității mediilor

1) a) Dacă x, y și z sunt trei numere reale pozitive, arătați că:

$$xy+xz+yz\leq x^2+y^2+z^2$$

b) Dacă $a,b,c\in(0,\infty)$, arătați că:

$$\frac{a}{a^2+bc}+\frac{b}{b^2+ac}+\frac{c}{c^2+ab}\leq\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

(OL Caraș-Severin, cls. VIII 2017)

Indicație b): $a^2+bc=a^2+\left(\sqrt{bc}\right)^2\geq 2a\sqrt{bc}\Rightarrow\frac{a}{a^2+bc}\leq\frac{a}{2a\sqrt{bc}}=\frac{1}{2\sqrt{bc}}$

2) Fie a, x, y numere reale pozitive cu proprietatea că

$$x(y-a)\geq y(a-x).$$

Arătați că $a^2\leq xy$

(GM 4/2017)

3) Arătaţi că

$$\frac{x+y+1}{\sqrt{xy}+\sqrt{(x+1)(y+1)}}+\frac{x+y+2}{\sqrt{xy}+\sqrt{(x+2)(y+2)}}+...+\frac{x+y+2016}{\sqrt{xy}+\sqrt{(x+2016)(y+2016)}}\geq 2016$$

(GM 5/2015)

Indicaţie:

Demonstrăm că fiecare raport este ≥ 1, prin însumare se obţine cerinţa. Folosim inegalitatea mediilor $M_a \geq M_g$ şi arătăm că $\frac{x+y+n}{\sqrt{xy}+\sqrt{(x+n)(y+n)}}\geq 1$.

4) a) Arătaţi că oricare ar fi a>0, b>0 numere reale avem $\frac{a+b}{2}\leq\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

b) Dacă a,b,c sunt numere reale pozitive astfel încât $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=\frac{2}{5}$, demonstraţi că

$$\sqrt{8a+\frac{b}{2}}+\sqrt{8b+\frac{c}{2}}+\sqrt{8c+\frac{a}{2}}\geq 1$$

(SGM 11/2014)

5) Fie a,b,c trei numere reale mai mari sau egale decât -2, având suma nulă.

a) Demonstraţi că $a^3-3a+2\geq 0$;

b) Arătaţi că $a^3+b^3+c^3\geq -6$.

(C.Interjud. Traian Lalescu 2011, cls.VIII, enunţ modificat)

6) Fie a, b, c lungimile laturilor unui ΔABC.

a) Să se determine natura ΔABC dacă are loc relaţia $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$

b) Dacă c are valoare constantă, iar expresia (p-a)(p-b) are valoare maximă, să se demonstreze că triunghiul este isoscel (s-a notat cu p semiperimetrul triunghiului).

7) a) Să se demonstreze că dintre toate dreptunghiurile cu acelaşi perimetru, pătratul are aria maximă,

b) Să se demonstreze că dintre toate dreptunghiurile cu aceeaşi arie, pătratul are perimetrul minim,

c) Fie a lungimea ipotenuzei unui triunghi dreptunghic, iar S aria sa. Să se demonstreze că dacă $\frac{a}{2}\leq\sqrt{S}$, atunci triunghiul este isoscel.

Indicaţie:

a) Fie a,b dimensiunile dreptunghiului şi P-perimetrul, A-aria

Din $\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}$(inegalitatea mediilor)$\Rightarrow ab\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\Rightarrow A=ab\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, condiţia de maxim este echivalent cu condiţia de egalitate)

b) P=2a+2b$\geq 4\sqrt{ab}$ =4$\sqrt{A}$; perimetrul este minim dacă a=b, deci dreptunghiul este pătrat;

c) Ridicând relaţia dată la pătrat şi aplicând teorema lui Pitagora, obţineţi cerinţa.

✓ Aplicaţii ale Identităţii lui Lagrange:

8) Demonstraţi că $(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geq(ac+bd)^2$ (inegalitatea CBS)

Indicatie: Aplicăm identitatea lui Lagrange

✓ Aplicaţii ale Inegalitatea CBS:

9) $(a+b+c)^2 \le 3(a^2+b^2+c^2), (\forall) a,b,c \in \mathbb{R}$

Indicaţie: aplicaţi CBS pentru x = y = z = 1

10) Dacă a_1, a_2, b_1, b_2 sunt numere reale care satisfac condiţia $a_1b_1 + a_2b_2 = 1$ atunci $(a_1^2 + a_2^2)\cdot(b_1^2 + b_2^2) \ge 1$.

✓ Aplicaţii ale Inegalităţii lui Titu Andreescu:

11) Demonstraţi că:

a) $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \ge a+b+c, (\forall) a,b,c > 0$;

b) $\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a} \ge a+b+c, (\forall) a,b,c > 0$;

5. PROBLEME PROPUSE. INDICAŢII. EVALUARE.

12) Să se demonstreze că pentru orice numere reale pozitive au loc inegalităţile:

a) $6 > \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$ (indicaţie.: aplicaţi inegalitatea cunoscută: $a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca$);

b) dacă a+b+c=1, atunci $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \ge 9$

c) Dacă a, b, c sunt numere reale strict pozitive atunci:

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \ge 6.$$

13)

Arătaţi că: $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \ge 4$

Indicatie:

Metoda reducerii: efectuaţi calcule

Metoda inegalităţii remarcabile: aplicaţi $\mathbf{M_a} \ge \mathbf{M_g}$ pentru numerele a şi b, respectiv $\frac{1}{a}$ şi $\frac{1}{b}$

14) Să se arate că: $n(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}) \ge (n+1)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}\right)$, pentru orice număr natural n≥1.

(Indicaţie: notaţi x=$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$ şi inegalitatea se transformă într-o inegalitate simplu de demonstrat)

15) Demonstraţi că oricare ar fi n număr natural nenul avem : $\frac{\sqrt{6}}{5} + \frac{\sqrt{20}}{9} + \frac{\sqrt{42}}{13} + ... + \frac{\sqrt{2n(2n+1)}}{4n+1} < \frac{n}{2}$

Indicaţie: Observăm că termenul general $\frac{\sqrt{2n(2n+1)}}{4n+1} = \frac{\sqrt{2n(2n+1)}}{2n+2n+1}$ ce ne duce cu gândul la inegalitatea mediilor pentru 2n şi 2n+1.

16) Demostraţi că:

$$\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+d^2}{c+d} + \frac{d^2+a^2}{d+a} \ge a+b+c+d, (\forall) a,b,c,d > 0;$$

Indicaţie: vezi ex.11 de mai sus.